

1

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ (Δ.Ε.)

Έστω $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$ τ.δ $\sim f(x; \theta)$
 $\downarrow$
 θ εκτίμησες κατά θάλασσα

π.χ. αν $f \rightarrow N(\mu, \sigma^2)$ $\rightarrow$ Έστω γνωστό
 $\hat{\mu} = \bar{X} \rightarrow$ Δεν μας δίνει
 κατά πόσο δίκ
 των εκτιμήσεων
 το βήμα
 εκτίμησες

π.χ. $(x_1, \dots, x_{20})$ κεραιόχεις από βωτοστάθια βίρας
 20 γολιτζίω (66 kg)

$$\bar{x} = 74.55 \text{ kg}$$

$\hat{\mu}$
 $\rightarrow$ Πόσο κοντά στον πραγματικό
 αριθμητικό μέσο μ είμαστε;
 $\rightarrow$ Πόσο πιθανό είναι το μ να
 απέχει από το $\bar{x} > 5 \text{ kg}$;

Θ αν η ανάλυση προεβλέπει αν μπορούμε
 να πούμε ότι βίρα του τ.δ. το μ "βρίσκεται
 με κάποια πιθανότητα μεταξύ 2 τιμών"

π.χ. $72 < \mu < 78 \rightarrow$ Δ.Ε με συνέπεια
 $\rightarrow L(\vec{x})$ $\rightarrow U(\vec{x})$ επιβεβαιώνω $\gamma = 1 - \alpha$ (6.6)

σημειώ: $P(72 < \mu < 78) = \gamma$
 $\rightarrow$ δείχνει ποσοστά βίρας ή γενικότερα (6.6)

Παρατήρηση

1) Πραγματοί Ερωτήσεις

Σε 100 δείγματα τεχνικών η $\gamma\%$ από τα
 δείγματα $[L(\vec{x}), U(\vec{x})]$ θα περιέχουν αν έχουν
 περισσότερο θ .

2) $n \rightarrow$ $\searrow$ εύρος $\searrow$
 $\gamma \nearrow$ $\searrow$ $\gg$ $\nearrow$

3) Όπως θα δούμε υπάρχουν περιπτώσεις του
 ενός Δ.Ε. με το ίδιο γ . Γενικά διαφέρουν
 από το μικρότερο εύρος.

ΓΕΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ ΚΑΤΑΚΕΥΗΤΕ

$$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ τ.δ. } \sim f(x; \vec{\theta})$$

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα $\gamma = 1 - \gamma_0 \Delta \epsilon$ $\gamma_0 < 1$
 $g(\vec{\theta}) \leadsto$ πυροδότηση

1) Βρίσκουμε β.β. $T = T(\vec{x})$ που η κατανομή της εξαρτάται
 από το $\vec{\theta}$ (βασικά στατιστική εκτίμηση του $g(\vec{\theta})$)

2) Βρίσκουμε συνάρτηση $Y = Y(T, g(\vec{\theta}))$ που η
 κατανομή της δεν εξαρτάται από το $\vec{\theta}$

3) Υπολογίζουμε σταθερές c_1, c_2 $\% P(c_1 \leq Y \leq c_2) = \gamma$

4) Πόσοις η συνθήκη αντιστρέφεται $c_1 \leq Y(T, g(\vec{\theta})) \leq c_2$
 ως προς $g(\vec{\theta}) \leadsto L(\vec{x}) \leq g(\vec{\theta}) \leq U(\vec{x})$

A) Κανονικός Πλ. Θυστός

1) $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n)$ $N(\mu, \sigma^2)$ $\xrightarrow{\text{DE}}$ $\gamma = 1 - \alpha \%$
 σ^2 γνωστό

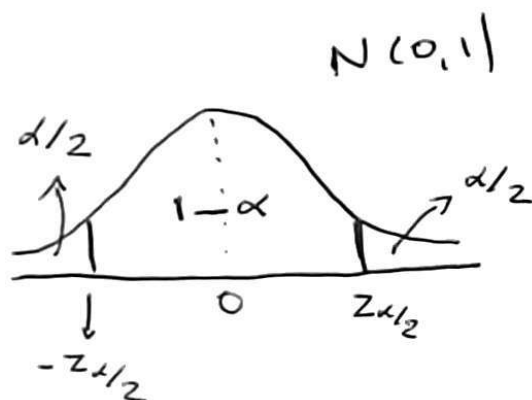
• $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ κατανομή εξαρτάται από το μ

• $Y = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ —||— std —||—

• $P(C_1 \leq Y \leq C_2) = 1 - \alpha = \gamma$

$\downarrow$
 $P(Y \leq C_1) = P(Y \geq C_2) = \alpha/2$

αύξω συστηματικά ελάττωστο εύρος



n.x. $\gamma = 0.95 \sim \alpha = 0.05$

$\sim \alpha/2 = 0.025$

$1 - \alpha/2 = 0.975$

$z_{0.025} = 1.96$ (πίνακας)

• $-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$

$\Rightarrow \underbrace{\bar{X} - z_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}}_{\hookrightarrow L(\vec{X})} \leq \mu \leq \underbrace{\bar{X} + z_{\alpha/2} \sigma/\sqrt{n}}_{\hookrightarrow U(\vec{X})}$

• ορίζεται $\ell = U(\vec{X}) - L(\vec{X}) = \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}$

• Αν θεωρήσουμε το n : $\ell \leq d \leadsto$

$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \leq d \Rightarrow n \geq \left(\frac{2\sigma}{d} z_{\alpha/2} \right)^2$

2) $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$

$N(\mu, \sigma^2)$

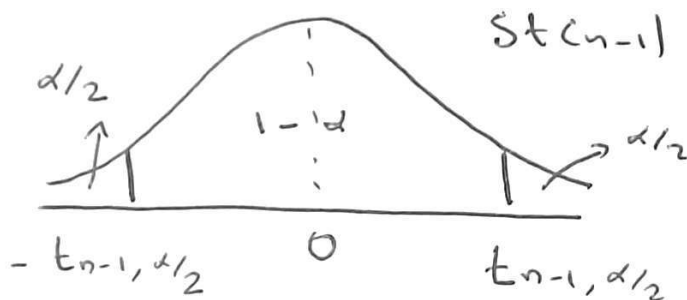
$\Delta \in \gamma = 1 - \alpha / 0$

σ^2 $\rightarrow$ γ $\rightarrow$ σ^2

$\hookrightarrow$ σ^2 $\rightarrow$ γ $\rightarrow$ σ^2

$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

$Y = \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim St(n-1)$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X_i - \bar{X})^2$



Гуттерман

$\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, \alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{n-1, \alpha/2}$

$n = 25$, $\gamma = 0.95 \rightarrow \alpha/2 = 0.025$

$t_{24, 0.025} = 2.064$

$\hookrightarrow 0.975$

3) $\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)$

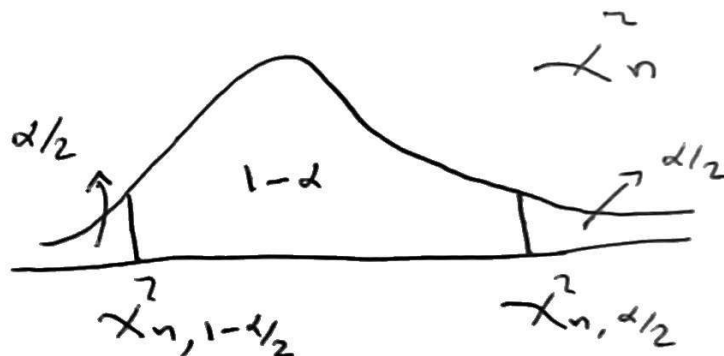
$N(\mu, \sigma^2)$

γ $\rightarrow$ γ $\rightarrow$ γ

$\hookrightarrow \Delta \in \gamma = 1 - \alpha / 0$

$T = \sum (X_i - \mu)^2$

$Y = \sum \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2_n$



σ^2 $\rightarrow$ γ $\rightarrow$ γ

$\downarrow$

σ^2 $\rightarrow$ γ $\rightarrow$ γ

$n = 25$, $\gamma = 0.95 \rightarrow \alpha/2 = 0.025$
 $\chi^2_{25, 0.025} = 40.65$
 $\chi^2_{25, 0.975} = 13.12$

(5)

$$\chi^2_{n, 1-\alpha/2} \leq \frac{\sum (x_i - t)^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n, \alpha/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\sum (x_i - t)^2}{\chi^2_{n, \alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \chi^2_{n, 1-\alpha/2}}$$

4) $\vec{X} = (x_1, \dots, x_n) \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu \rightarrow 0$
 $\hookrightarrow \Delta \in 8 = (1-\beta)\%$

$$T = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$Y = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$\boxed{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\chi^2_{n-1, \alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \chi^2_{n-1, 1-\alpha/2}}$$

(6)

B) Δύο ανεξάρτητες κανονικές η2. distributions

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_{n_1} &\sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y_1, \dots, Y_{n_2} &\sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{aligned} \quad \underline{\text{ανεξ.}}$$

1) Δε $\gamma = (1-\alpha)\%$ $(\mu_1 - \mu_2)$ όταν σ_1, σ_2 γνωστοί

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\underbrace{\mu_1 - \mu_2}_\mu, \underbrace{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}_{\sigma^2}\right)$$

$$X = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

$$\bullet -Z_{\alpha/2} \leq X \leq Z_{\alpha/2} \leadsto$$

$$\boxed{\bar{X} - \bar{Y} - Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + Z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

2) Δε $\gamma = (1-\alpha)\%$ $(\mu_1 - \mu_2)$ όταν $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ άγνωστο

$$\bullet T = \bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\underbrace{\mu_1 - \mu_2}_\mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}\right)$$

$$\bullet Z = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - \mu}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$S_1^2 = \frac{1}{n_1-1} \sum_{i=1}^{n_1} (x_i - \bar{x})^2, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2-1} \sum_{i=1}^{n_2} (y_i - \bar{y})^2 \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n_1-1}^2 \\ \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n_2-1}^2 \end{aligned} \right| \Rightarrow Q = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n_1+n_2-2}^2$$

$$V = \frac{\bar{Z}}{\sqrt{\frac{Q}{n_1+n_2-2}}} \sim t_{n_1+n_2-2}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\tau_1 - \tau_2)}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-1}}} \rightarrow S_P^2 \\ &= \frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (\tau_1 - \tau_2)}{S_P \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \end{aligned}$$

$$-t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} \leq V \leq t_{n_1+n_2-2, \alpha/2}$$

$$\Rightarrow (\bar{x} - \bar{y}) - t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} S_P \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right\}^{1/2} \leq \tau_1 - \tau_2 \leq (\bar{x} - \bar{y}) + t_{n_1+n_2-2, \alpha/2} S_P \left\{ \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right\}^{1/2}$$

(8)

3) $\Delta \in \gamma = (1-\alpha)\%$ $(t_1 - t_2)$ $\text{оца } \sigma_1, \sigma_2 \propto \gamma \text{---} \omega \sigma \propto$
 $\text{на } \alpha \nu \text{---} \sigma$

проге $\gamma \sigma \text{---} \sigma$

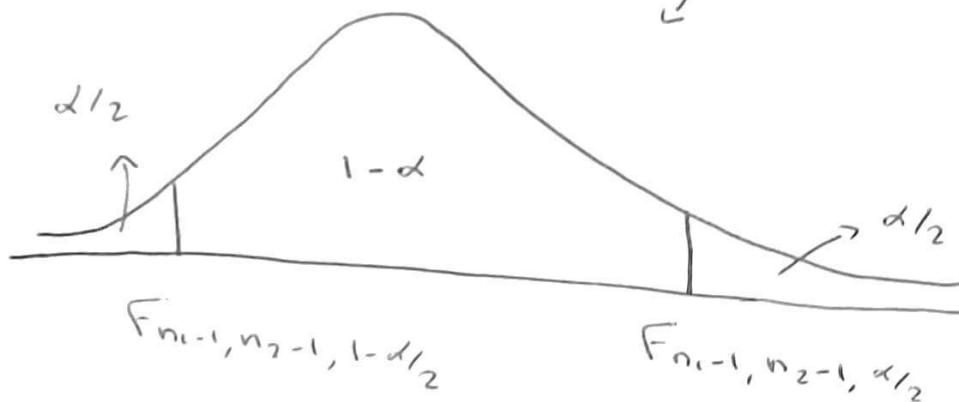
$$\frac{(\bar{x} - \bar{y}) - (t_1 - t_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \sim St(\nu),$$

$$\nu = \frac{\left\{ S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2 \right\}^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$$

$$(\bar{x} - \bar{y}) - t_{\nu, \alpha/2} \left\{ \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right\}^{1/2} \leq t_1 - t_2 \leq (\bar{x} - \bar{y}) + t_{\nu, \alpha/2} \left\{ \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2} \right\}^{1/2}$$

4) $\Delta \in \gamma = (1, -1) \%$ $\frac{G_1^2}{G_2^2}$ $(t_1, t_2 \rightarrow \gamma - \omega G \tau \epsilon)$

$$F = \frac{s_1^2 / \sigma_1^2}{s_2^2 / \sigma_2^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$



οχι G-παραμ
↓
οχι βεγαιγο

$$F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} \leq \frac{S_1^2/S_2^2}{s_1^2/s_2^2} \leq F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2}} \frac{s_1^2}{s_2^2} \leq G_1^2/G_2^2 \leq \frac{1}{F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2}} \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

$$16x^2 \in 1$$

$$F_{n_1-1, n_2-1, 1-\alpha/2} = \frac{1}{F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2}}$$

$$n_1 = 11, \quad n_2 = 13 \quad \gamma = 0.48$$

$$F_{10,12,0.01} = 4.30$$

$$F_{10,12, 0.99} = \frac{1}{F_{12,10, 0.01} \rightarrow 0.49} = \frac{1}{4.71} = 0.21$$

Γ) Δύο συσχετισμένοι κεντρικοί ηθ-οί

$$\begin{array}{ll} x_1, \dots, x_n & N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ y_1, \dots, y_n & \frac{\text{cov. x}}{N(\mu_2, \sigma_2^2)} \end{array}$$

Δε $\gamma = (1-\alpha)/2$ $(\mu_1 - \mu_2)$ σ_1, σ_2 γνωστά

$$D_i = x_i - y_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma^2)$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2 \text{Cov}(x_i, y_i)$$

$$D_1, \dots, D_n \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \begin{array}{l} \mu = \mu_1 - \mu_2 \\ \sim \text{neq in cov} \\ A2) \end{array}$$

$$\bar{D} = \bar{x} - \bar{y} \quad S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum (D_i - \bar{D})^2$$

$$\bar{D} - t_{n-1, \alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{D} + t_{n-1, \alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

ΠΡΟΒΕΥΧΙΣΜΟΣ ΔΕ

Ορισμός: 1) Έστω $\{F_n : n=1,2,\dots\}$ ακολουθία συναρτήσεων κατωφίως η.θ. συνεχούς. Λέτε ότι αυτή συσχέτιζεται ως προς F :

$$F_n \xrightarrow{\alpha} F \iff \forall x \in \mathbb{R} \text{ στο οποίο } F \text{ συνεχίζεται} : \lim_n F_n(x) = F(x)$$

2) Έστω $\{X_n : n=1,2,\dots\}$ ακολουθία ζ.τ. $\Theta < \infty$ λέτε ότι αυτή συσχέτιζεται κατά η.θ. συνεχούς ως προς X

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff \forall \varepsilon > 0 : \lim_n P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

3) Έστω $\{X_n : n=1,2,\dots\}$ ακολουθία ζ.τ. $\Theta < \infty$ λέτε ότι αυτή συσχέτιζεται κατά νόμο ως προς X

$$X_n \xrightarrow{d} X \quad \text{όταν} \quad F_{X_n} \xrightarrow{\alpha} F$$

4) ΚΟΘ

$\{X_n : n=1,2,\dots\}$ ανεξ. και ι.θ. συνεχούς Τ.Μ. με γενερότητα f και διασπορά σ^2 .

$$\text{Αν } S_n = \sum X_i \quad \text{τότε} \quad \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

$$\iff \underbrace{\frac{S_n/n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}}_{\bar{X}_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

5) ΑΝΜΑ

$\{X_n : n=1,2,\dots\}$ ανεξ. και ι.θ. συνεχούς Τ.Μ. με γενερότητα f λέτε ότι :

$$\frac{S_n}{n} = \bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Πηκτή: Αν
$$\left. \begin{array}{l} X_n \xrightarrow{d} X \\ Y_n \xrightarrow{P} c \end{array} \right\} \rightarrow \frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$$

Πρόταση: Έστω ε.δ. $X_1, \dots, X_n$ και κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 (πενεφροειδής). Τότε:

i) Αν μ άγνωστο και σ^2 γνωστό, προσεγγιστικά ($n \gg$)

Εν $\Delta \in$ του μ με β.β. $\gamma = 1 - \alpha$: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}$

ii) Αν μ, σ^2 άγνωστα τότε προσεγγιστικά ($n \gg$)

Εν $\Delta \in$ του μ με β.β. $\gamma = 1 - \alpha$: $\bar{X} \pm z_{\alpha/2} s_n / \sqrt{n}$,

όπου
$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Ανάλυση

i) Αν μ κοθ $\leadsto \frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \xrightarrow[n \gg]{d} Z \sim N(0, 1)$

Άρα προσεγγιστικά $\frac{(\bar{X} - \mu) \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{X} - z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + z_{\alpha/2} \sigma / \sqrt{n}}$$

ii) Αν μ ΑΝΜΑ $\leadsto \bar{X} \xrightarrow[n \gg]{P} \mu$ Εν

$$s_n^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \left[\sum X_i^2 + n \bar{X}^2 - 2 \bar{X} \sum X_i \right] =$$

$$= \frac{1}{n} \left[\sum X_i^2 - n \bar{X}^2 \right] = \frac{\sum X_i^2}{n} - \bar{X}^2 \xrightarrow{P} E(X^2) - E(X)^2 = V(X) = \sigma^2$$

Από $\frac{S_n}{6} \xrightarrow{P} 1$ και από το Λήμμα

$$\frac{\frac{(\bar{X}-t)\sqrt{n}}{6}}{\frac{S_n}{6}} \xrightarrow{d} \frac{Z}{1} = Z \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\bar{X}-t)\sqrt{n}}{S_n} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1) \quad \text{οπότε προκύπτει ότι:} \\ (n \gg)$$

$$\frac{(\bar{X}-t)\sqrt{n}}{S_n} \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$P(-Z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{X}-t)\sqrt{n}}{S_n} \leq Z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{X} - Z_{\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq t \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2} \frac{S_n}{\sqrt{n}}}$$

Παράδειγμα:

$$1) \quad X_1, \dots, X_n \sim U(0, \theta) \quad \begin{cases} \mu = \theta/2 \\ \sigma^2 = \theta^2/12 \end{cases} \\ n \gg$$

$$\frac{\bar{X} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/12n}} \sim N(0,1) \Rightarrow$$

$$-Z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \theta/2}{\sqrt{\theta^2/12n}} \leq Z_{\alpha/2} \quad \rightarrow$$

$$\frac{2\sqrt{3n} \bar{X}}{\sqrt{3n} + Z_{\alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{2\sqrt{3n} \bar{X}}{\sqrt{3n} - Z_{\alpha/2}}$$

$$2) \quad X_1, \dots, X_n \sim f(x; \theta) = \frac{3\theta^3}{x^4}, \quad x \geq \theta$$

$n \gg$

$$\mu = \int_{\theta}^{\infty} x \cdot \frac{3\theta^3}{x^4} dx = \dots = \frac{3\theta}{2}$$

$$E(x^2) = \int_{\theta}^{\infty} x^2 \cdot \frac{3\theta^3}{x^4} dx = \dots = 3\theta^2$$

$$\sigma^2 = E(x^2) - \mu^2 = 3\theta^2 - \frac{9}{4}\theta^2 = \frac{3\theta^2}{4}$$

$$\frac{\text{Apr} \quad (\bar{x} - \frac{3}{2}\theta)}{\sqrt{\frac{3}{4}}\theta / \sqrt{n}} \sim N(0,1) \leadsto$$

$$\leadsto -z_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{x} - \frac{3}{2}\theta)}{\sqrt{\frac{3}{4}}\theta / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2} \leadsto$$

$$\leadsto \frac{\bar{x}}{\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}} z_{\alpha/2}} \leq \theta \leq \frac{\bar{x}}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{n}} z_{\alpha/2}}$$

3) $X_1, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$

$\text{ΑΡΧΗ } X_i \in \{0, 1\} \text{ με π.ο.π. } p$
 $\text{--- " " --- } 1-p = q$

$\mu = p, \quad \sigma^2 = p(1-p)$

$$\frac{\bar{X} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0,1), \quad n \gg$$

(?)

$$S_n^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} (\sum X_i^2 - n \bar{X}^2) =$$
$$\stackrel{!!}{=} \frac{1}{n} (\sum X_i - n \bar{X}^2) = \frac{1}{n} (n \bar{X} - n \bar{X}^2) = \bar{X}(1-\bar{X})$$

ΑΡΧΗ από πρόταση (2)

$$\bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} z_{\alpha/2} \leq p \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} z_{\alpha/2}$$

όπου $\bar{X} = \frac{\sum X_i}{n} \rightarrow \# \text{ επιτυχιών στο } S_{\text{είσχε}}$

Το πλάτος του παρακείμενου ΔΕ είναι

$l = 2 \sqrt{\frac{\bar{X}(1-\bar{X})}{n}} z_{\alpha/2}$. Βρες το n ώστε το πλάτος να είναι l (δοσμένο)

"Συντηρητικός" $\leadsto \bar{X}(1-\bar{X}) \leq 1/4 \leadsto \bar{X}(1-\bar{X}) = 1/4 \text{ (max)}$

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2}{l^2}$$

$$4) \quad X_1, \dots, X_n \sim P(\lambda) \quad n \gg$$

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$$

$$\frac{(\bar{X} - \lambda) \sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0, 1) \quad n \gg$$

Ans ANMA $\bar{X} \xrightarrow{P} \lambda = \mu \Rightarrow \sqrt{\bar{X}} \xrightarrow{P} \sqrt{\lambda} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{P} 1$$

Ans $\lambda = \mu = \sigma^2$

$$\frac{\frac{(\bar{X} - \lambda) \sqrt{n}}{\sqrt{\lambda}}}{\frac{\sqrt{\bar{X}}}{\sqrt{\lambda}}} \xrightarrow{d} \frac{Z}{1} \sim N(0, 1)$$

$$\rightarrow \bar{X} - \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} z_{\alpha/2} \leq \lambda \leq \bar{X} + \sqrt{\frac{\bar{X}}{n}} z_{\alpha/2}$$

$$5) \quad X_1, \dots, X_{n_1} \sim \text{Bernoulli}(p_1)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim \text{Bernoulli}(p_2) \quad \underline{\omega \in \mathcal{S}}$$

$$\bar{X} = \hat{p}_1 \sim N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1}\right) \quad n_1 \gg$$

$$\bar{Y} = \hat{p}_2 \sim N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right) \quad n_2 \gg$$

Now we have

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \sim N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}\right)$$

Now we have (again 3)

$$\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n_1} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n_2}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq p_1 - p_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{n_1} + \frac{\bar{y}(1-\bar{y})}{n_2}} z_{\frac{\alpha}{2}}$$

Άσκησης Γενικού Τύπου Μετασχηματισμός

Από προηγούμενες:

$$1) X \sim f_X(x) \text{ και } Y = g(X)$$

$$\text{Τότε } Y \sim f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

$$2) \text{ Έστω } X_1, \dots, X_n \text{ τ.σ. και } f_X(x) \text{ π.κ.}$$

$$F_X(x)$$

$$a) T = \max X_i \sim ?$$

$$F_T(t) = P(\max X_i \leq t) = P(X_1 \leq t, \dots, X_n \leq t)$$

$$\underline{\underline{\text{αυτός}}} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq t) = [F_X(t)]^n$$

$$b) T = \min X_i \sim ?$$

$$F_T(t) = P(\min X_i \leq t) = 1 - P(\min X_i > t) =$$

$$= 1 - P(X_1 > t, \dots, X_n > t) \underline{\underline{\text{αυτός}}} 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > t) =$$

$$= 1 - [1 - F_X(t)]^n$$

Άσκηση 1

$$X_1, \dots, X_n \sim G(\alpha, b) \quad \alpha, b > 0$$

↑ γνωστό

i) Ενεργός για το $\bullet$ b

Η $G(\alpha, b)$ με α γνωστό ορίζει μια ΓΟΛ

Στήριγμα $\mathbb{R}^+$ με $\alpha \in \mathbb{R}^+$ του b

$$f(x; b) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-bx} = \underbrace{x^{\alpha-1}}_{h(x)} \underbrace{\frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)}}_{g(b)} \underbrace{\exp(-bx)}_{c(b) \cdot d(x)}$$

Άρα $\sim T = \sum X_i$ Ενεργός-μίας για το b .

ii) Ναια $\sim$ μετασχη του $Y_i = 2b X_i$

$$y = 2bx = g(x) \Rightarrow x = \frac{y}{2b} = g^{-1}(y)$$

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| =$$

$$= \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{2b} \right)^{\alpha-1} e^{-b \frac{y}{2b}} \frac{1}{2b} =$$

$$= \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y/2} \rightarrow \chi^2_{2\alpha}$$

Agg $Y = \sum_{i=1}^n Y_i = 2\theta \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{2\alpha n}$

iii) Σ -testimon $\gamma = (1-\alpha) \% \quad D \in \gamma$ to θ

$$\chi^2_{2\alpha n, 1-\alpha/2} \leq 2\theta \sum_{i=1}^n X_i \leq \chi^2_{2\alpha n, \alpha/2}$$

$$\Rightarrow \frac{\chi^2_{2\alpha n, 1-\alpha/2}}{2 \sum_{i=1}^n X_i} \leq \theta \leq \frac{\chi^2_{2\alpha n, \alpha/2}}{2 \sum_{i=1}^n X_i}$$

Aufgabe 2

$$X_1, \dots, X_n \sim f(x; \theta) = \frac{\theta}{x^2} I_{[\theta, +\infty)}(x)$$

i) Ensembles γ to θ ;

$$f(\vec{x}; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta}{x_i^2} I_{[\theta, +\infty)}(x_i) = \theta^n \frac{1}{\prod x_i^2}$$

$$\cdot \prod_{i=1}^n I_{[\theta, +\infty)}(x_i) = \underbrace{\theta^n I_{[\theta, +\infty)}(X_{(1)})}_{g(T; \theta)} \underbrace{\frac{1}{\prod x_i^2}}_{h(x)}$$

$\Rightarrow T = \min X_i \equiv X_{(1)} \in \gamma$ to θ .

$$T \sim F_T(t) = 1 - [1 - F_X(t)]^n$$

Α222- $F_X(t) = \int_{\theta}^t \frac{\theta}{x^2} dx = \dots = 1 - \frac{\theta}{t} \rightarrow$

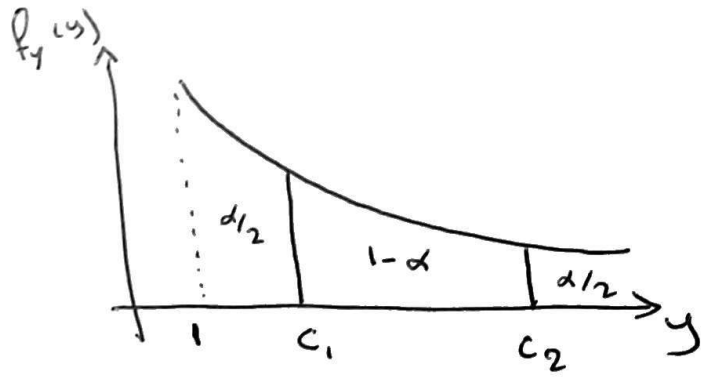
$$\rightarrow F_T(t) = 1 - \left(\frac{\theta}{t}\right)^n \Rightarrow f_T(t) = \frac{n\theta^n}{t^{n+1}}, t \geq \theta$$

iii) Κατανομή του $Y = T/\theta$?

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(T/\theta \leq y) = P(T \leq \theta y) = \\ &= F_T(\theta y) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta y}\right)^n = 1 - y^{-n} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = n y^{-n-1}, y \geq 1$$

iii) Σχετική διαστήματα $\gamma = (1-\alpha)\%$ ΔΕ $\gamma_1 < \theta$



$$P(c_1 \leq Y \leq c_2) = 1 - \alpha$$

Σχετική διαστήματα $\rightarrow$ όχι βεβαιόστο

$$P(Y \leq c_1) = P(Y \geq c_2) = \alpha/2$$

οπότε

$$F_Y(c_1) = 1 - F_Y(c_2) = \alpha/2$$

$$1 - c_1^{-n} = 1 - (1 - c_2^{-n}) = \alpha/2$$

$$\rightarrow \begin{cases} c_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{1-\alpha/2}} \\ c_2 = \frac{1}{\sqrt[n]{\alpha/2}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &T/\theta \\ &\uparrow \\ &c_1 \leq Y \leq c_2 \rightarrow \end{aligned}$$

$$x_{(1)} \sqrt[n]{\alpha/2} \leq \theta \leq x_{(1)} \sqrt[n]{1-\alpha/2}$$